اختبار الرياضيات لدورة 2018

لشهادة ختم التعليم الأساسي

تمرين1(3ن)

1) ب	1	2) ج	1	3) ج	1

-1 $ABCD$ متوازي أضلاع اذن قطراه يتقاطعان في المنتصف ومنه
$\frac{y_B + y_D}{2} = \frac{y_A + y_C}{2}$ يعني $\frac{2+y_D}{2} = 0$ يعني $y_D = -2$
(يمكن الاجابة على السؤال بإنجاز تعيين للنقاط) 1ن

-2 $13-9 = 4$ 1ن

-3 $\left. \begin{array}{l} 27^{2018} - 2 \times 27^{2017} = 27^{2017} \times (27-2) \\ = 27^{2017} \times 25 = 15 \times 27^{2016} \times 45 = M_{15} \end{array} \right\}$ 1ن

تمرين2(4ن)

نعتبر العددين الحقيقيين الموجبين a و b حيث $a^2 = 11+6\sqrt{2}$ و $b^2 = 11-6\sqrt{2}$.

1) أ) قارن العددين a^2 و b^2

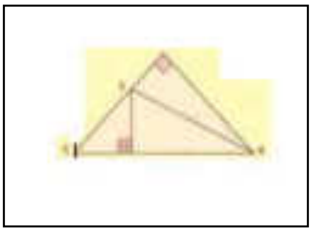
بما أن $-6\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$ فإن $11-6\sqrt{2} < 11+6\sqrt{2}$ 0.25
يعني $b^2 < a^2$

ب) بين أن $(a-b)$ عدد موجب

لدينا $b^2 < a^2$ وبما أن a و b عددين موجبين فإن 0.5ن
$b < a$ يعني $a-b > 0$ ومنه $(a-b)$ عدد موجب

2) أحسب a^2b^2 ثم استنتج أن $ab = 7$.

لدينا $a^2b^2 = (11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})$ 0.25
$= 11^2 - (6\sqrt{2})^2 = 121 - 72 = 49$
بما أن $(ab)^2 = 49 = 7^2$ و $ab \geq 0$ فإن $ab = 7$ 0.5ن



3) أحسب $(a-b)^2$ ثم استنتج أن $a-b = 2\sqrt{2}$

لدينا : $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 0.5ن
$= 11+6\sqrt{2} - (2\times 7) + 11 - 6\sqrt{2} = 8$

وبما أن $(a-b)$ عدد موجب فإن $a-b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. 0.25

ABC مثلث متقايس الضلعين وقائم في A، حيث AB = a
E النقطة من [AC] حيث AE = b

4) أ) بين أن المثلث HEC متقايس الضلعين

بما أن المثلث ABC متقايس الضلعين وقائم في A فإن $A\hat{C}B = A\hat{B}C = 45°$
في المثلث HEC لدينا : $E\hat{C}H = A\hat{C}B = 45°$ و $C\hat{H}E = 90°$ 0.5ن
اذن $C\hat{E}H = 180 - (90+45) = 45°$ وبالتالي المثلث HEC متقايس الضلعين(له زاويتان متقايستان) قمته الرئيسية H .

ب) بين أن $EH = 2$.

لدينا $EC = AC - AE = a - b = 2\sqrt{2}$

المثلث HEC قائم ومتقايس الضلعين (وتره يمثل قطر المربع الذي ضلعه $[EH]$)

اذن $EC = EH\sqrt{2}$ يعني $EH = \frac{EC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

0.5ن

5) لتكن S مساحة المثلث BEC.

أ) بين أن $S = a\sqrt{2}$.

المثلث ABC قائم ومتقايس الضلعين في A. اذن $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

مساحة المثلث BEC هي

$$S = \frac{BC \times EH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times \cancel{2}}{\cancel{2}} = a\sqrt{2}$$

0.5ن

ب) بين أيضا أن $S = 2 + 3\sqrt{2}$، ثم استنتج أن $a = 3 + \sqrt{2}$.

لتكن S_1 مساحة المثلث ABC و S_2 مساحة المثلث ABE

اذن

$$S = S_1 - S_2 = \frac{AB^2}{2} - \frac{AB \times AE}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a \times b}{2} = \frac{11 + 6\sqrt{2} - 7}{2} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{2} = 2 + 3\sqrt{2}$$

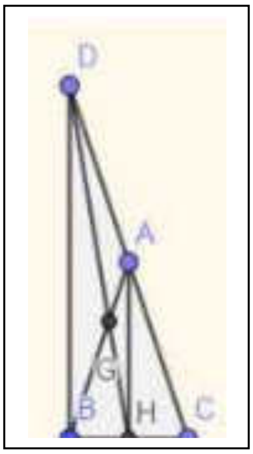
0.25

وبالتالي $a\sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}$ يعني $a = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3$

0.25

تمرين3(4ن)

ABC مثلث متقايس الضلعين وقمته الرئيسية A حيث BC = 2 و AB ≥ 3.
لتكن النقطة D مناظرة النقطة C بالنسبة إلى A
و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).
المستقيمان (AB) و (DH) يتقاطعان في النقطة G.
1) أ) بيّن أنّ المثلّث BCD قائم في B.



في المثلث BCD لدينا
- A منتصف $[DC]$ لأن D و C متناظرتان بالنسبة إلى A
- $AB = AC = AD$

اذن المثلث BCD قائم في B (وتره $[DC]$) 0.5ن

ب) بيّن أنّ G مركز ثقل المثلث BCD.

✡ المثلث ABC متقايس الضلعين قمته الرئيسية A و $[AH]$ ارتفاعه الموافق للضلع $[BC]$

اذن فهو كذلك موسطه الصادر من A ومنه H منتصف $[BC]$.

✡ في المثلث BCD لدينا: $[BA]$ و $[DH]$ هما الموسطين الصادرين على التوالي من B و D

اذن نقطة تقاطعهما G هي مركز ثقل هذا المثلث. 0.5ن

نفترض أنّ $AB = x + 3$ حيث x عدد حقيقي موجب.

2) أ) بيّن أنّ $BD^2 = 4(x^2 + 6x + 8)$

لدينا: $AC = AB = x + 3$ و $DC = 2AC = 2(x+3)$

المثلث BCD قائم اذن حسب نظرية بيتاغورفإنّ: $BD^2 + BC^2 = DC^2$

$$BD^2 = DC^2 - BC^2 = [2(x+3)]^2 - 2^2 = 4(x+3)^2 - 4 = 4[(x+3)^2 - 1]$$
$$= 4(x^2 + 6x + 9 - 1) = 4(x^2 + 6x + 8)$$

0.75

ب) بيّن أنّ $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$

بما أنّ BD موجب فإنّ: $BD = 2\sqrt{35}$ يعني $BD^2 = (2\sqrt{35})^2 = 140$ يعني $4(x^2+6x+8) = 140$

يعني $x^2 + 6x + 8 = \frac{140}{4} = 35$ يعني $x^2 + 6x + 8 - 35 = 0$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$ 0.5ن

3) أ) بيّن أنّ $x^2 + 6x - 27 = (x+3)^2 - 36$

0.5ن $(x+3)^2 - 36 = x^2 + 6x + 9 - 36 = x^2 + 6x - 27$

ب) إستنتج أنّ $x^2 + 6x - 27 = (x-3)(x+9)$

لدينا:

0.5ن $x^2 + 6x - 27 = (x+3)^2 - 36 = (x+3)^2 - 6^2 = (x+3-6)(x+3+6) = (x-3)(x+9)$

ج) أوجد x حيث $BD = 2\sqrt{35}$، ثم إستنتج البعد BG

$BD = 2\sqrt{35}$ يعني $x^2 + 6x - 27 = 0$ يعني $(x-3)(x+9) = 0$ يعني $x + 9 = 0$ أو $x - 3 = 0$ يعني $x = -9$ أو $x = 3$

وبما أنّ x عدد حقيقي موجب فإنّ $x = 3$ 0.5ن

نعلم أنّ G مركز ثقل المثلث BCD و $[BA]$ موسطه الصادر من B اذن $BG = \frac{2}{3}BA = \frac{2}{3} \times (3+3) = 4$

0.25

تمرين4(5ن)

A و B نقطتان من المستوي حيث AB = 6 و I منتصف قطعة المستقيم [AB] لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي قطرها [AB]

و C نقطة من $\mathscr{C}$ ، حيث AC = 5.

1) أحسب BC.

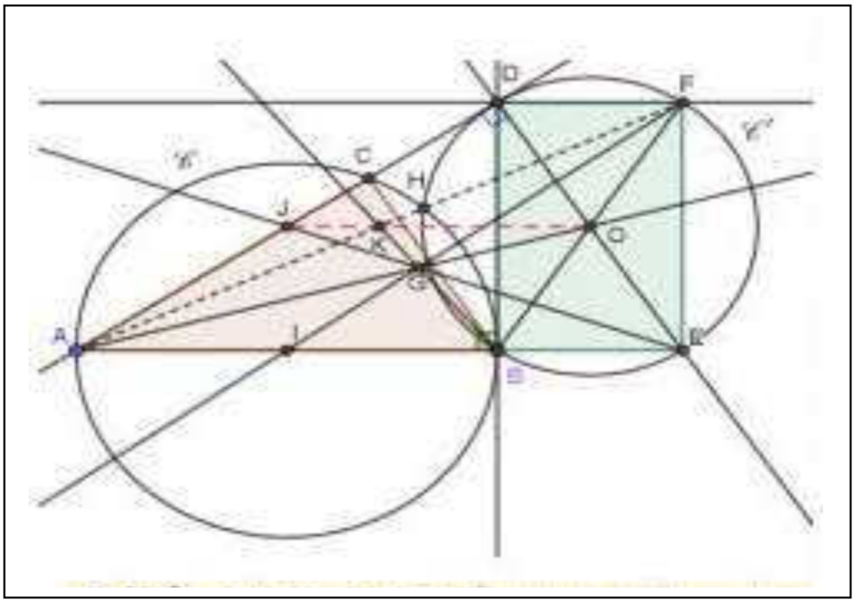
لدينا : $\mathscr{C}$ دائرة و $[AB]$ قطر لها و C نقطة منها حيث $C \neq A$ و $C \neq B$ إذن المثلث ABC قائم في C

حسب نظرية بيتاغور فإن : $BC^2 + AC^2 = AB^2$ إذن $BC^2 = AB^2 - AC^2$

$$BC^2 = 6^2 - 5^2 = 36 - 25$$

0.5ن

$$BC = \sqrt{11}$$



2) المماس للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة B يقطع (AC) في النقطة D.

أ) بين أن $CD = \frac{11}{5}$

المثلث ABD قائم في B و $[BC]$ ارتفاعه الصادر من B . اذن $BC^2 = AC \times CD$

0.75

ومنه $$\boxed{CD = \frac{BC^2}{AC} = \frac{11}{5}}$$

ب) أحسب BD.

المثلث BCD قائم في C . حسب نظرية بيتاغور فإن $BD^2 = BC^2 + CD^2$

يعني $BD^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(\sqrt{11}\right)^2 = \frac{121}{25} + \frac{11 \times 25}{1 \times 25} = \frac{121 + 275}{25} = \frac{396}{25}$

0.5ن

ومنه $$\boxed{BD = \sqrt{\frac{396}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{11}}$$

3) المستقيم العمودي على (AC) في النقطة D يقطع (AB) في نقطة E. لتكن $\mathscr{C}''$ الدائرة التي قطرها [DE] و مركزها O.

المستقيم المار من D والموازي للمستقيم (AB) يقطع $\mathscr{C}''$ في نقطة F مخالفة للنقطة D.

أ) بين أن الرباعي BDFE مستطيل

* $\mathscr{C}'$ دائرة و $[DE]$ قطر لها و F نقطة منها حيث $F \neq D$ و $F \neq E$ إذن $D\hat{F}E = 90°$

و لنا $D\hat{B}E = 90°$ لأن ($D\hat{B}A = 90°$ و $E \in (AB)$)

* لنا $(DF)//(AB)$ و $(DB) \perp (AB)$ إذن $(DB) \perp (DF)$ ومنه $B\hat{D}F = 90°$

بالتالي الرباعي $BDFE$ له 3 زوايا قائمة فهو مستطيل. 0.75

ب) الدائرتان $\mathscr{C}'$ و $\mathscr{C}''$ تتقاطعان في نقطة H مخالفة للنقطة B. اثبت أن النقط A و H و F على استقامة واحدة

المثلث AHB يقبل الأرتسام في الدائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها $[AB]$ يمثل أحد أضلاعه اذن فهو قائم في H ومنه $(AH) \perp (BH)$

المثلث FHB يقبل الأرتسام في الدائرة $\mathscr{C}'$ التي قطرها $[BF]$ أحد أضلاعه اذن فهو قائم في H

ومنه $(FH) \perp (BH)$ اذن $(FH) // (AH)$ وبالتالي النقاط A و H و F على استقامة واحدة. 0.5ن

4) المستقيمان (AO) و (FI) يتقاطعان في نقطة G والمستقيمان (BG) و (AF) يتقاطعان في نقطة K

أ) بين أن K منتصف [AF]

في المثلث ABF لدينا : $[AO]$ هو الموسط الصادر من A و $[FI]$ هو الموسط الصادر من F و بما أن $(FI) \cap (AO) = \{G\}$

فإن G مركز ثقل المثلث ABF ومنه ($AG = \frac{2}{3}AO$) 0.75

(BG) هو المستقيم الحامل للموسط الصادر من B . وحيث أن $(BG) \cap (AF) = \{K\}$ فإن K منتصف $[AF]$

ب) اثبت أن G مركز ثقل المثلث AED. 0.25

$[AO]$ هو الموسط الصادر من A للمثلث ADE ، ولنا $G \in [AO]$ بحيث $AG = \frac{2}{3}AO$ وبالتالي G مركز ثقل المثلث AED

ج) المستقيمان (EG) و (AD) يتقاطعان في النقطة J. بين أن النقاط J و K و O على استقامة واحدة 0.75

- لنا G مركز ثقل المثلث ADE إذن (EG) هو المستقيم الحامل للموسط الصادر من E وحيث أن $(EG) \cap (AD) = \{J\}$ فإن J منتصف $[AD]$.
- في المثلث ABF لنا : O منتصف $[BF]$ و K منتصف $[AF]$ إذن $\boxed{(OK)//(AB)}$
- في المثلث ADE لنا : O منتصف $[DE]$ و J منتصف $[AD]$ إذن $\boxed{(OJ)//(AE)}$

وبما أن $(AB) = (AE)$ فإن $\boxed{(OK)//(OJ)}$ ومنه النقاط J و K و O على استقامة واحدة .

لتكن ABCDEFGH متوازي مستطيلات حيث $AB=6$ و $AE=4$ و $AD=3$

1) أ) بيّن أن ADG مثلث قائم في D

■ لدينا $\left.\begin{array}{l}(AD)\perp(DC)\\(AD)\perp(DH)\end{array}\right\}$ لأنّ $(ABCD)$ مستطيل و $ADHE$ مستطيل)

وبما أن المستقيمين (DC) و (DH) محتويين في المستوي (DCG) ومتقاطعين في D

فإنّ (AD) يعامد المستوي (DCG) في D .

0.5

■ و لدينا $(DG)\subset(DCG)$ اذن $(AD)\perp(DG)$ في D و منه المثلث ADG قائم في D .

ب) أحسب DG و AG.

المثلث DCG قائم في C . اذن حسب نظرية بيتاغور فإنّ $DG^2=DC^2+CG^2$

$DG^2=6^2+4^2=36+16=52$

إذن $DG=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ 0.5

$[AG]$ هو قطر لمتوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ إذن

$AG=\sqrt{DC^2+AD^2+AE^2}=\sqrt{6^2+4^2+3^2}=\sqrt{61}$ 0.5

2) لتكن M النقطة من [AE] حيث AM = 3 و Δ المستقيم العمودي على المستوي (AED) في النقطة M.

3دق

أ) بيّن أن Δ محتو في المستوي (AEF).

لدينا: $\left.\begin{array}{l}(EF)\perp(EA)\\(EF)\perp(EH)\\(EA)\subset(AED)\\(EH)\subset(AED)\\(EA)\cap(EH)=\{E\}\end{array}\right\}$ اذن $(EF)\perp(AED)$ ولدينا $\Delta\perp(AED)$ في M 0.5

ومنه $\Delta // (EF)$ وبالتالي هما محتويان في مستوي واحد يمر من E و F و M إذن $\Delta\subset(MEF)=(AEF)$

ب) المستقيم Δ يقطع المستقيم (AF) في النقطة N. بيّن أن $\frac{AM}{AE}=\frac{MN}{EF}$.

في المثلث AEF لدينا: $M\in(AE)$ و $N\in(AF)$ حيث $(MN)//(EF)$.

حسب مبرهنة طالس في المثلث فإنّ: $\frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AF}=\frac{MN}{EF}$ بالتالي $\frac{AM}{AE}=\frac{MN}{EF}$ 0.75

ج) أحسب MN ثمّ DN.

لنا $\frac{MN}{EF}=\frac{AM}{AE}$ إذن $\frac{MN}{6}=\frac{3}{4}$ يعني $\boxed{MN=\frac{3\times 6}{4}=\frac{9}{2}=4{,}5}$ 0.25

■ لحساب DN نحسب أولا DM

المثلث ADM قائم ومتقايس الضلعين في A اذن $\boxed{DM=\sqrt{2}\times AD=3\sqrt{2}}$

لدينا: $\left.\begin{array}{l}(MN)\perp(AED)\\(DM)\subset(AED)\end{array}\right\}$ ومنه $(MN)\perp(DM)$ في M 0.25

وبالتالي المثلث DMN قائم في M اذن حسب نظرية بيتاغور:

$$DN^2=DM^2+MN^2$$
$$=(3\sqrt{2})^2+(\frac{9}{2})^2=18+\frac{81}{4}=\frac{153}{4}$$

ومنه $DN=\sqrt{\frac{153}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{17}$ 0.25

3) أحسب حجم الهرم NMAD.

لدينا $(AED) \perp \Delta$ في M و N نقطة من Δ. إذن $[NM]$ هو ارتفاع الهرم $NMAD$

وبالتالي حجمه هو

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{AD \times AM}{2} \times NM$$

0.5

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{4} cm^3$$