RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2022	**Session principale**
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (4,5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points

$A(-1,-1,-1)$, $B(-2,-1,0)$, $C(1,1,-5)$ et le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = -2\vec{N}$. En déduire que A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit P le plan passant par A, B et C.

Montrer qu'une équation de P est $x+y+z+3=0$.

c) On considère les points $E(1,0,2)$ et $H(-1,-2,0)$.

Vérifier que $\overrightarrow{HE} = 2\vec{N}$. En déduire que H est le projeté orthogonal de E sur le plan P.

d) Calculer le volume du tétraèdre EABC.

2) On considère dans l'espace, l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ tels que :

$x^2+y^2+z^2-2x-4z-9=0$.

a) Montrer que S est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$.

b) Montrer que P coupe S suivant le cercle (ζ_1) du plan P de centre H et de rayon $\sqrt{2}$.

c) Vérifier que A et B appartiennent à (ζ_1).

3) On considère le plan $Q : x-5y+z-3=0$.

a) Montrer que P et Q sont sécants suivant la droite (AB).

b) Vérifier que $E \in Q$.

c) En déduire que le plan Q coupe la sphère S suivant un cercle (ζ_2) dont on précisera le centre et le rayon.

d) Montrer que (ζ_1) et (ζ_2) se coupent en A et B.

✎Exercice 2 : (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n}, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)^2}{u_n}$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1 .

b) Exprimer v_n en fonction de n .

c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

3) On pose pour tout entier naturel n , $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$.

a) Vérifier que $S_1 = \ln 3$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $S_n = \ln(n+2)$.

c) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 10$.

✎Exercice 3 : (4,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points F , G et I d'affixes respectives :

$z_F = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$, $z_G = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ et $z_I = -\dfrac{1}{2} + i$.

1) a) Vérifier que $z_F - z_I = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_G - z_I = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

b) Montrer que F et G appartiennent au cercle (ζ) de centre I et de rayon 1.

c) Vérifier que $z_F - z_I = i(z_G - z_I)$. En déduire que le triangle IFG est rectangle en I .

2) **Dans la figure 1 de l'annexe jointe,** on a tracé le cercle (ζ).

Construire les points F et G .

3) a) Vérifier que $(2 + 2\sqrt{3})i$ est une racine carrée de $-16 - 8\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 3z + \dfrac{25}{4} + 2\sqrt{3} = 0$.

4) Soient K et L les points d'affixes respectives : $z_K = -\dfrac{3}{2} + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_L = \overline{z_K}$.

a) Montrer que $\dfrac{z_K - z_F}{z_F - z_I} = i\sqrt{3}$. En déduire que $(FK) \perp (FI)$.

b) Construire K et L .

c) Vérifier que $z_G - z_L = (2 + \sqrt{3})(z_F - z_I)$. En déduire que $(GL) // (FI)$.

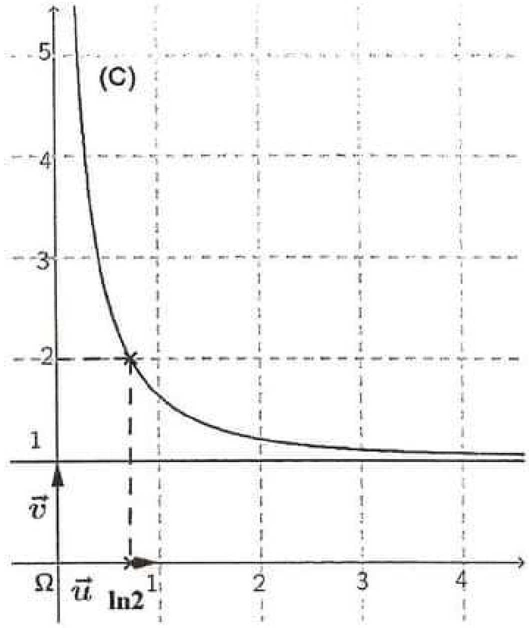
d) Les droites (FK) et (GL) se coupent en un point D .

Montrer que le cercle (ζ) est inscrit dans le triangle DKL .

✎Exercice 4 : (7 points)

1) Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

On donne ci-contre la courbe représentative (C) de g dans un repère orthonormé $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.



En utilisant le graphique :

a) Déterminer $g(\ln 2)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) Justifier que pour tout x de $]0,+\infty[$,

$g'(x)<0$ et $g(x)>1$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(e^x-1)$.

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=g(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Vérifier que $f(\ln 2)=0$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3) a) Montrer que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $\ln(g(x))=x-f(x)$.

b) En déduire que $\Delta : y=x$ est une asymptote à la courbe (Γ) au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que (Γ) est au-dessous de Δ.

4) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=g(x)$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique notée α.

5) **Dans la figure 2 de l'annexe jointe,** on a tracé la droite Δ et on a placé le point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$.

Tracer la courbe (Γ).

6) a) Vérifier que $\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}=e^x+\dfrac{e^x}{e^x-1}$. En déduire que $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\alpha}\frac{e^{2x}}{e^x-1}dx=e^{\alpha}+f(\alpha)-2$.

b) Soit $I=\displaystyle\int_{\ln 2}^{\alpha} e^x\ln(e^x-1)dx$.

Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I=e^{\alpha}f(\alpha)-\displaystyle\int_{\ln 2}^{\alpha}\frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$.

c) En déduire que $I=2$.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

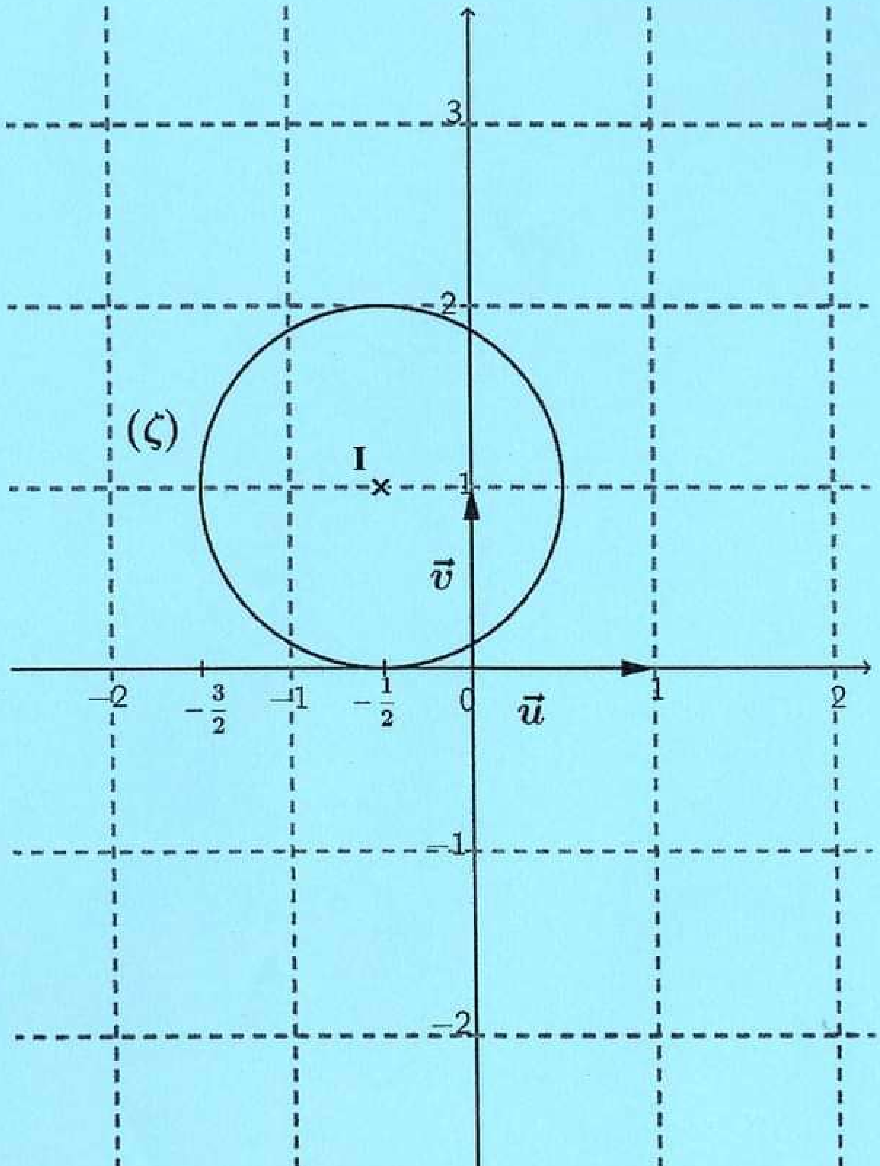
Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences Techniques
Session principale (2022)
Annexe à rendre avec la copie

figure 1 :



Ne rien écrire ici

figure 2 :