

Lycée Tahar Sfar Mahdia	<u>Devoir de contrôle n° 3</u> Mathématiques	Classe : 4 ^{ème} Sc exp1
Date : 15 / 04 / 2019	Prof : Meddeb Tarak	Durée : 2 heures

NB : Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°1 : (6 pts)

On considère plusieurs sacs S_1, S_2, \dots, S_n tels que :

- Le premier sac S_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
- Chacun des sacs S_2, S_3, \dots, S_n contient deux boules blanches et deux boules noires.
- On tire au hasard une boule de S_1 .
- On place la boule tirée de S_1 dans S_2 , puis on tire au hasard une boule de S_2 .
- On place la boule tirée de S_2 dans S_3 , puis on tire au hasard une boule de S_3 .
- etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n l'événement : « la boule tirée de S_n est blanche ».

Et on note p_n la probabilité de l'événement B_n , ainsi $p_n = p(B_n)$.

- 1) a/ Calculer $p_1 = p(B_1)$, $p(B_2/B_1)$ et $p(B_2/\bar{B}_1)$.
b/ Calculer $p_2 = p(B_2)$.
- 2) A l'aide d'un arbre pondéré, montrer que : $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{2}{5}$.
- 3) On pose pour tout $n \geq 1$, $q_n = p_n - \frac{1}{2}$.
a/ Montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique.
b/ Exprimer q_n puis p_n en fonction de n .
c/ En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
- 4) Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,4999 \leq p_n \leq 0,5$?

Exercice n°2 : (6 pts)

Soit U la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{eU_n} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

- 1) a/ Exprimer U_1 et U_2 sous forme d'une puissance de e .
b/ Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq e$.
c/ Montrer que la suite U est croissante.
d/ En déduire que U est convergente vers e .

2) Soit V la suite définie sur \mathbb{N} par : $V_n = 1 - \ln(U_n)$.

a/ Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n , puis retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(U_k)$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$.

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = n - 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$.

b/ En déduire l'expression de T_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{T_n}$.

Exercice n°3 : (8 pts)

Dans l'annexe ci-jointe **page 3**, on a représenté, dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (a + be^{-x})^2$, où a et b sont deux réels positifs.

On admet que :

➤ La droite $D: y = 1$ est une asymptote de \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

➤ T est la tangente à \mathcal{C} au point $I \left(\ln 2, \frac{9}{4} \right)$ et de coefficient directeur $\left(-\frac{3}{2} \right)$.

1) a/ Déterminer $f(0)$, $f'(\ln 2)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b/ Ecrire une équation de T .

c/ Calculer a et b .

2) Dans la suite de l'exercice, on admet que : $f(x) = (1 + e^{-x})^2$.

a/ Dresser le tableau de variations de f .

b/ Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $]1, +\infty[$.

c/ Montrer que, pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f^{-1}(x) = -\ln(\sqrt{x} - 1)$.

d/ Tracer la courbe \mathcal{C}' de f^{-1} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de la feuille annexe.

3) Soit \mathcal{A} l'aire, exprimer en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = \ln 2$.

a/ Développer $f(x)$ puis déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R} .

b/ Montrer que : $\mathcal{A} = \frac{11}{8} + \ln 2$.

c/ En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\frac{9}{4}}^4 \ln(\sqrt{x} - 1) dx$.



FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de contrôle n°3 (15/04/2019)

Nom et prénom :

Classe : 4^{ème} Sc exp 1

